Calabi–Yau 超曲面の幾何転移

(based on arXiv:2207.01632)

三浦 真人

京都大学 数理解析研究所

日本数学会 2022 年度 秋季総合分科会

2022 年 9 月 15 日

Calabi–Yau 多様体の地誌学（geography）

目標：2 つの観察と主定理を紹介。

定義 1

高々標準特異点を持つような正規射影代数多様体 Y であって、$K_Y = 0$ かつ $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$（$0 < i < \dim Y$）を満たすものを Calabi–Yau 多様体という。

とくに、複素 3 次元非特異 Calabi–Yau 多様体に興味がある。

Calabi–Yau 多様体の地誌学に関する 3 つの重要問題：

- 変形族は有界か？
- 幾何転移を介して連結になるか？(Reid's fantasy)

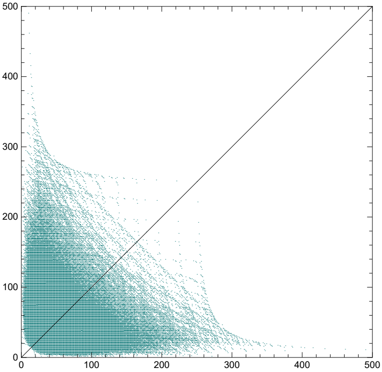
$$Y \to \overline{Y} \rightsquigarrow Y' \quad (\text{以下、}\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}' \text{ と略記})$$

- ミラー対称性 $Y \leftrightarrow Y^\vee$ は成立するか？

$$\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}' \;\leftrightarrow\; \mathcal{Y}'^\vee \to \mathcal{Y}^\vee \quad \text{も期待される。}$$

第一の観察：世代数の偶奇

Calabi–Yau 超曲面の Hodge 数 $(h^{1,1}, h^{1,2})$ は全て計算されていて、既知の最大のデータベースとなっている（Kreuzer–Skarke'00）。



$|\chi/2| = |h^{1,1} - h^{2,1}|$ が奇数になる確率 p は $1/e \sim 0.3679$ に近い？

$$\widehat{p} = \frac{11106}{30108} \sim 0.3689, \quad \text{標準誤差 } \sigma_{\mathrm{std}} = \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{30108}} \sim 0.0027$$

Calabi–Yau 超曲面（非特異 & 特異）

定義 2 (Batyrev '96)

整凸多面体 Δ が、反射的 (reflexive) であるとは、双対 Δ^* もまた整凸多面体になるときをいう。

4 次元反射的多面体 Δ $\to$ toric Fano 多様体 $\mathbb{P}_\Delta$
$\to$ MPCP(maximal projective crepant partial) 解消 $X = \widehat{\mathbb{P}}_\Delta$
$\to$ general elephant $Y_\Delta \in |-K_X|$ は非特異な Calabi–Yau 多様体

定義 3 (Artebani–Comparin–Guilbot '16)

有理凸多面体の組 (Δ_1, Δ_2) が、葛籠（つづら） (good pair) であるとは、Δ_1, Δ_2^* は内部に原点を含む整凸多面体であり、かつ $\Delta_1 \subset \Delta_2$ を満たすときをいう。（Δ_1, Δ_2^* は ap-反射的というクラスになる。）

4 次元葛籠 (Δ_1, Δ_2)
$\to$ MPCP 解消 $X = \widehat{\mathbb{P}}_{\Delta_2}$ 上の単項式線形系 $L(\Delta_1) \subset |-K_X|$
$\to$ general な元 $Y_{\Delta_1,\Delta_2} \in L(\Delta_1)$ は特異な Calabi–Yau 多様体

定義 2 は $\Delta_1 = \Delta_2$ の葛籠に相当。双対：$(\Delta_1, \Delta_2) \leftrightarrow (\Delta_2^*, \Delta_1^*)$.

Calabi–Yau 超曲面の幾何転移

命題 1 (Fredrickson '15)

Calabi–Yau 超曲面の定義（定義 *2*、定義 *3*）で、*MPCP* 解消 $\widehat{\mathbb{P}}_\Delta$ を $\mathbb{Q}$-分解的端末的 *toric* 双有理モデル $X \dashrightarrow \widehat{\mathbb{P}}_\Delta$ に取り替えても（非特異、特異）*Calabi–Yau* 多様体 $Y \subset X$ が定義できる。

反射的多面体の包含関係 $\Delta \subset \Delta'$

　$\to$ 幾何転移 $\mathcal{Y}_\Delta \to \mathcal{Y}_{\Delta'}$ が存在：$Y_\Delta \to Y_{\Delta,\Delta'} \rightsquigarrow Y_{\Delta'}$.

さらに、$\Delta \subset \Delta'$ は葛籠のカバー関係の列に分解できる：

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \Delta \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r, equal] & \Delta = \Delta'_p \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & \Delta'_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \Delta' \arrow[d, equal] \\
\Delta \arrow[r, hook] & \Delta_1 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & \Delta_q = \Delta' \arrow[r, equal] & \cdots \arrow[r, equal] & \Delta' \arrow[r, equal] & \Delta'
\end{tikzcd}$$

Δ_i^*, Δ_j' は一般に反射的ではないが ap-反射的。

包含関係 $\Delta_i^* \supset \Delta_{i+1}^*$ は、MMP の因子収縮 $X_i \to X_{i+1}$ に対応。

第二の観察：地誌学の三位一体（trinity）

3 つの圏（有向グラフ）に密接な関係がある：

頂点	矢印	対象の次元
(ap-) 反射的多面体	包含関係	d
toric 多様体	双有理写像	d
Calabi–Yau 超曲面	幾何転移	$d-1$

関係は単純でない。

例：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bl}_p\,\mathbb{P}^4 & \longrightarrow & \mathbb{P}^4 \\ \downarrow{\scriptstyle \text{Mfs.}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{Mfs.}} \\ \mathbb{P}^3 & \longrightarrow & pt \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{\text{quintic}} \\ \downarrow & & \\ \mathcal{Y}_{\text{double octic}} & & \end{array}$$

各圏に MMP と Sarkisov プログラムの対応物があるはず。
相対 Picard 数 1 の fibration の構造を持つ Calabi–Yau 多様体が、
森ファイバー空間の対応物になるのではないか？(推測)

第二の観察：地誌学の三位一体（trinity）

3 つの圏（有向グラフ）に密接な関係がある：

頂点	矢印	対象の次元
(ap-) 反射的多面体	包含関係	d
線織多様体	双有理写像	d
Calabi–Yau 超曲面	幾何転移	$d-1$

関係は単純でない。

例：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bl}_p\,\mathbb{P}^4 & \longrightarrow & \mathbb{P}^4 \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mfs.}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mfs.}} \\ \mathbb{P}^3 & \longrightarrow & pt \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{\text{quintic}} \\ \big\downarrow & & \\ \mathcal{Y}_{\text{double octic}} & & \end{array}$$

各圏に MMP と Sarkisov プログラムの対応物があるはず。
相対 Picard 数 1 の fibration の構造を持つ Calabi–Yau 多様体が、
森ファイバー空間の対応物になるのではないか？(推測)

第二の観察：地誌学の三位一体（trinity）

3 つの圏（有向グラフ）に密接な関係がある：

頂点	矢印	対象の次元
(ap-) 反射的多面体	包含関係	d
線織多様体	双有理写像	d
Calabi–Yau 多様体	幾何転移	$d-1$

関係は単純でない。

例：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bl}_p\,\mathbb{P}^4 & \longrightarrow & \mathbb{P}^4 \\ \downarrow{\scriptstyle \text{Mfs.}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{Mfs.}} \\ \mathbb{P}^3 & \longrightarrow & pt \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_{\text{quintic}} \\ \downarrow & & \\ \mathcal{Y}_{\text{double octic}} & & \end{array}$$

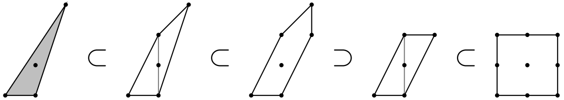
各圏に MMP と Sarkisov プログラムの対応物があるはず。
相対 Picard 数 1 の fibration の構造を持つ Calabi–Yau 多様体が、
森ファイバー空間の対応物になるのではないか？（推測）

主定理（$d = 2$ の場合の三位一体）

定理 2 (M '22, 一人住まいの改築定理)

任意の反射的多角形の組は、包含関係の列によって繋げられる。

（i.e., 原点のみを内部格子点とする「一人住まい」の整凸多角形）

例： 

証明では「良い Sarkisov 分解」が存在するという補題を示す。
この補題は Castelnuovo–Noether の定理 $\mathrm{Bir}\,\mathbb{P}^2 = \langle \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^2, \sigma \rangle$ の言い換えだとも見なせる（σ は標準 Cremona 変換）。

定理 3 (M '22, 象を背負った版の弱分解定理)

general elephant が楕円曲線であるような射影有理曲面 X_1, X_2 と任意の双有理写像 $X_1 \dashrightarrow X_2$ に対し、これを分解する爆発・収縮の列があって、*general elephant* の組はこれに伴う楕円曲線の変形および同型な固有変換（*i.e.* “幾何転移”）の列によって繋げられる。